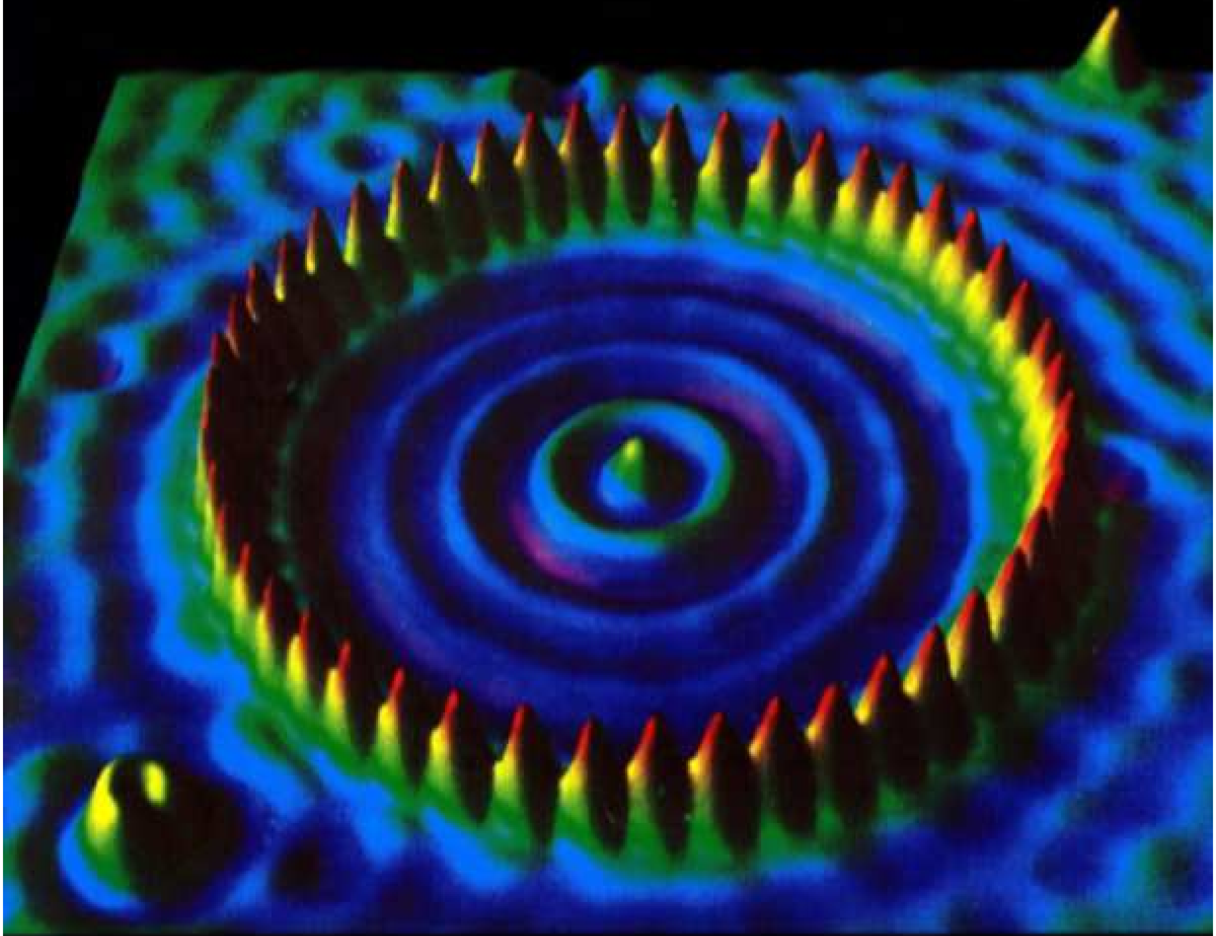
D. J. Zoevistian



Úvod do teorie pole

aneb o původu přírodních sil

David J. Zoevistian

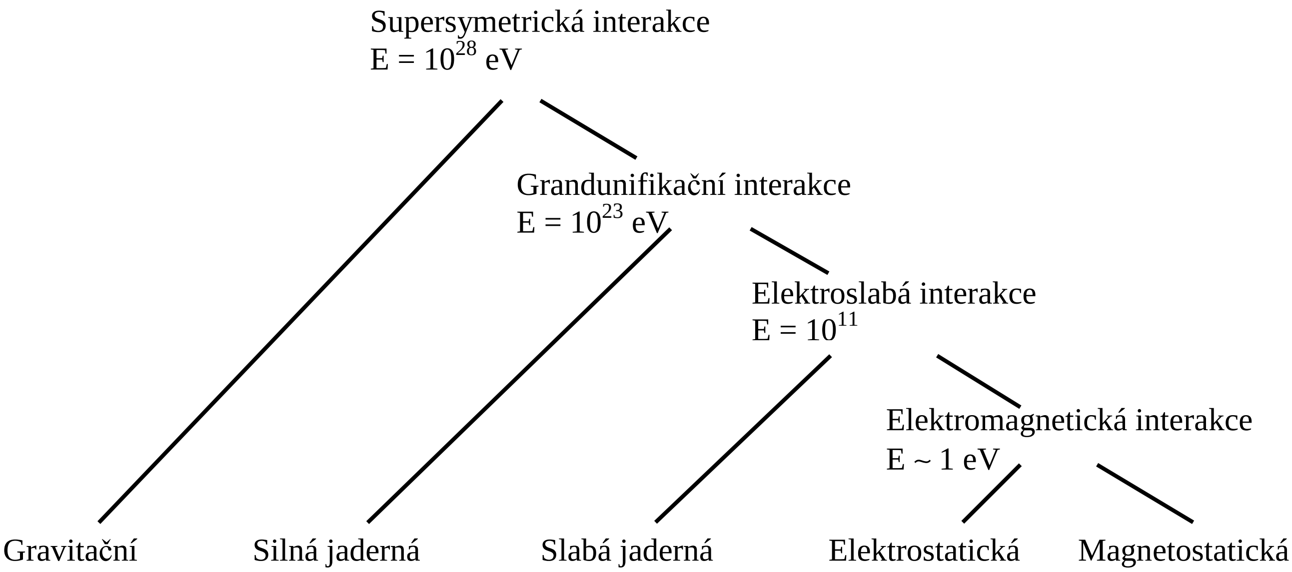
Úvod do teorie pole

Obsah

Předmluva

Hovoříme-li ve fyzice o polích, máme zpravidla na mysli síly, jimiž částice hmoty navzájem interagují.
Příroda disponuje celkem 9 druhy interakcí, z nichž ovšem některé nejsou nezávislé, jak je ukázáno ve schématu 1.
Některé interakce se projevují teprve při vysokých energiích, sloučením dvou jiných interakcí do jedné jediné interakce, jež nese nové vlastnosti.

Schéma 1



Jak je patrno ze schématu 1, lze tímto způsobem postupně sjednocovat všechny druhy interakcí.
Elektrostatickou (ES) a **magnetostatickou** (MS) sílu se podařilo formálně sloučit již J. C. Maxwellovi v šedesátých letech 19. století.
Došlo tak k objevu **elektromagnetické** (EM) interakce.
Zcela jednotný popis elektrických a magnetických jevů však nabídl až o 40 let později Albert Einstein ve své speciální teorii relativity.
V téže době také Einstein položil základy kvantové teorie elektromagnetického pole.
Více než 100 let po Maxwellově objevu elektromagnetického pole se podařil podobný husarský kousek trojici Amerických fyziků:
S. Weinbergovi, A. Salamovi a S. Glashowovi, kteří roku 1968

představili světu sjednocenou teorii elektromagnetické a **slabé jaderné** (WN) interakce.
Tak byla objevena **elektroslabá** (EW) síla.
Teorie byla později ještě podrobněji propracována C. N. Yangem, R. L. Millsem, P. Higgsem a G. Van T´hooftem a roku 1983 plně experimentálně potvrzena na urychlovači LHC v Ženevském CERNu, při energiích řádově 10^{11} eV.
Úspěchy teorie elektroslabých sil přirozeně vedly k pokusům o ještě jednotnější popis fyzikálních interakcí.
V polovině sedmdesátých let 20. století proto vznikla teorie velkého sjednocení (GUT) pokoušející se sloučit elektroslabou interakci s interakcí silnou jadernou, jež drží pohromadě kvarky, v jednu jedinou sílu, která dostala název **grandunifikační**.
Předpovědi této teorie jsou bohužel soudobými technickými prostředky neverifikovatelné, neboť k velkému sjednocení přírodních sil by dle teorie mělo dojít až při energiích okolo 10^{23} elektronvoltů.
Nejtvrdším oříškem jehož rozlousknutí nyní čekalo teoretické fyziky, byl úplně jednotný popis všech přírodních sil, včetně gravitace.
Více než 20 let se gravitace urputně bránila tvrdým nájezdům teoretiků usilujících vehementně o její kvantování, a odhodlaných použít k tomu všech prostředků jež skýtala matematika konce 20. století.
Teprve na sklonku 90. let 20. století gravitace, tak jak jsme ji doposud znali z Einsteinovy obecné teorie relativity, náporu teoretiků podlehla a se ctí Alberta Einsteina hodnou navždy opustila hlavní jeviště teoretické fyziky, kde kralovala bezmála jedno století.
Její místo nyní zaujala zbrusu nová **teorie superstrun**.
Stalo se tak ovšem za cenu přidání dalších sedmi rozměrů ke stávajícím čtyřem dimenzím OTR.
Hlavní zásluhy na rozvoji této nové fyzikální teorie mají Američan Edward Witten a Čech Petr Hořava.
Při energii 10^{28} eV dochází v této teorii ke sjednocení kvantové gravitace s grandunifikační interakcí za vzniku tzv. **supergravitace**, neboli **supersymetrické interakce** (SUSY).
Objasnění mechanismů tohoto supersjednocení přírodních sil a zákonů patří bezesporu k vůbec největším výtvorům lidského génia, jaký zřejmě nemá v celých dosavadních dějinách naší civilizace obdoby.

V této knize si klademe za cíl ukázat, že teorie Cytoprostoru, pojednávaná v posledních 3 kapitolách, v sobě elegantním způsobem zahrnuje základní principy a přístupy obou současných konkurenčních kvantových teorií gravitace – M teorie (membránové) a teorie smyčkové kvantové gravitace. Ba co víc, dokonce umožňuje v mnoha ohledech její formální zjednodušení a zároveň prohloubení.
Řadě zde figurujících fyzikálních jevů, dává Cytoprostor zcela nový, dosud netušený význam a mnohé z nich navíc dovede odvodit a vysvětlit jednodušším a názornějším způsobem.

Začněmež však od píky a věnujme se postupně všem fyzikálním interakcím až do jejich úplného sjednocení.
Čtenář nám snad odpustí přílišnou stručnost, jíž se zde dopustíme, a to hned ze dvou důvodů: zaprvé, dnes již existuje řada zevrubných odborných publikací na toto téma, takže ti zainteresovanější mají přístup k informacím plně otevřen a zadruhé, soudobé znalosti v této oblasti jsou již natolik rozsáhlé, že by vydaly na menší knihovnu a naším cílem není toliko opakování známých faktů alébrž učinění nějakého toho krůčku vpřed za poznáním přírody a jejích zákonů.

Kniha vyžaduje od čtenáře plné zvládnutí 4 semestrů matematické analýzy a 3 semestrů lineární algebry.

Matematický úvod do čtvrté dimenze

Pro formulaci zákonů popisujících fyzikální entity zvané pole se klasický trojrozměrný popis nehodí.
Úspěchu je možno dosáhnout teprve tehdy, vyjádříme-li prostorové a časové souvislosti mezi událostmi a objekty geometrickými vztahy ve čtyřrozměrném prostoročase, kde úlohu čtvrté souřadnice zaujímá čas.
Prostorové souřadnice a komponenty veličin v prostoročase budeme nadále označovat latinskými indexy *i*, *j*, *k*, ... , *m*, *n*, ... , které nabývají hodnot 0, 1, 2, 3; např. $x^i \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$.
Čistě prostorové souřadnice a komponenty budeme opatřovat řeckými indexy $\alpha, \beta, \ldots, \mu, \nu, \ldots$, probíhajícími hodnoty 1, 2, 3; např. $x^\alpha = (x^1, x^2, x^3)$.
Při zápisu algebraických operací s těmito indexovými veličinami je velmi výhodné využívat **Einsteinova sumačního pravidla**, tj. provádět sumaci přes každý index jenž se vyskytuje v součinu právě dvakrát, za současného vynechání sumačního symbolu; např.

$$\sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 \equiv A^i A_i \ .$$

V kontextu s obecnou definicí vektorů v *n*-rozměrném vektorovém prostoru se pod čtyřvektorem A^i rozumí soubor čtyř veličin A^0, A^1, A^2, A^3, které se při Lorentzových transformacích prostoročasových souřadnicích transformují stejně jako souřadnice x^i:

$$A'^i = a^i A^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \cdot A_k \ . \qquad (1.1)$$

Kromě uvedených komponent čtyřvektorů A^i s indexy nahoře, zvaných **kontravariantní**, se zavádějí rovněž tzv. **kovariantní** složky A_i s indexy dole, a to pomocí vztahu

$$A_i \equiv \eta_{ik} A^k , \qquad (1.2)$$

kde η_{ik} je tzv. **Minkowského metrický tenzor** reprezentovaný maticovým operátorem

$$\hat{\eta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Lze snadno ukázat, že kovariantní a kontravariantní složky se transformují navzájem **kontragradientně**, tzn.

$$A'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \cdot A_k. \qquad (1.4)$$

Pod skalárním součinem dvou čtyřvektorů **A**, **B**, se rozumí algebraický výraz

$$\begin{aligned} A^i B_i &= A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = \eta_{ik} A^i B^k = \\ &= -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 = A_i B^i \ , \end{aligned} \qquad (1.5)$$

což je skalár invariantní vzhledem k transformacím souřadnic. Kvadrát velikosti daného čtyřvektoru **A** se definuje jako jeho skalární součin se sebou samým, tj.

$$A^2 \equiv A^i A_i = -\left(A^0\right)^2 + \left(A^1\right)^2 + \left(A^2\right)^2 + \left(A^3\right)^2. \qquad (1.6)$$

Podle znaménka čtverce čtyřvektoru se prostoročasové čtyřvektory rozdělují do tří skupin: $A^iA_i < 0$ – vektor časového typu,
$A^iA_i = 0$ – nulový, čili izotropní vektor,
$A^iA_i > 0$ – vektor prostorového typu.
Tři prostorové složky A^1, A^2, A^3 čtyřvektoru A^i tvoří vzhledem k transformacím čistě prostorových souřadnic trojrozměrný vektor **A**. Soubor komponent čtyřvektoru lze tedy symbolicky psát jako $A^i = (A^0, \mathbf{A})$.

Takové rozložení čtyřvektoru na prostorovou a časovou složku lze provést v každé inerciální soustavě, mění se však samozřejmě při Lorentzových transformacích.
Čtverec čtyřvektoru A^i je potom

$$A^i A_i = -\left(A^0\right)^2 + \mathbf{A}^2 . \qquad (1.7)$$

Pro vektor A^i časového typu lze vždy nalézt takovou souřadnou soustavu Σ', v níž prostorový vektor $\mathbf{A}' = 0$.
Jest to soustava jejíž časová osa má směr čtyřvektoru A^i.
Podobně pro každý vektor B^i prostorového typu lze vždy nalézt soustavu Σ', v níž je jeho časová komponenta $B'^0 = 0$.
Aritmetické operace mezi složitějšími strukturami – tenzory, které v prostoročase zavádíme, se řídí běžnými pravidly tenzorové algebry.
Pomocí tenzorového součinu vznikají tenzory vyšších řádů.
Např. součin tenzoru druhého řádu A^{ij} a tenzoru prvního řádu, tj. čtyřvektoru B^k vzniká tenzor třetího řádu $T^{ijk} = A^{ij}B^k$.
Analogicky pro smíšené tenzory.
Naopak pomocí operace kontrakce tenzoru, spočívající v sumaci přes dvojici indexů v daném tenzoru, vznikají tenzory řádu o dva nižšího.
Např. z tenzoru čtvrtého řádu A^{jklm} vznikne kontrakcí tenzor druhého řádu $A^{ik} = A^{ikl}{}_l$, a kontrakcí tenzoru druhého řádu A^{ik} získáme skalár $A = A^i{}_i = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3$, který se nazývá **stopou tenzoru** A^{ik} a označuje

$$A = tr\ A^{ik} . \qquad (1.8)$$

Mezi tenzory druhého řádu zaujímají zvláštní postavení tzv. **izotropní tenzory**, jejichž komponenty jsou neměnné ve všech souřadných soustavách STR.
Mezi izotropní tenzory patří rovněž i známý Kroneckerův tenzor

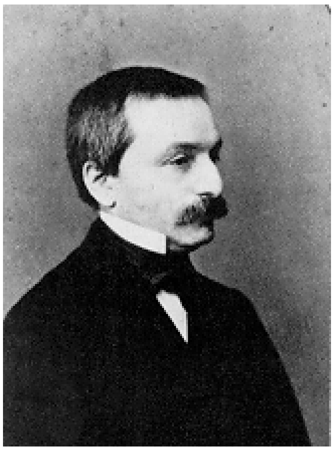
$$\delta^i_k = \begin{cases} 1 & pro \quad i = k \\ 0 & pro \quad i \neq k \end{cases} \qquad (1.9)$$

jehož stopa

$$tr\,\delta^i_k = \delta^i_i = 4\,. \qquad (1.10)$$

pro každý vektor A^i je

$$\delta^i_k A^i = A^k\,. \qquad (1.11)$$



Leopold Kronecker (1823 – 1891)

Croneckerův tenzor má tedy charakter jednotkového čtyřtenzoru druhého řádu reprezentovaného maticovým operátorem

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.12)$$

Kontravariantním čtyřtenzorem *r*-tého řádu se rozumí soubor 4^r veličin $T^{i_1, i_2, \ldots, i_r}$, které se při transformaci souřadnicové soustavy $x^i \to x'^i = a^i{}_k x^k$ transformují jako součin r souřadnic x^i:

$$T'^{i_1, i_2, \ldots, i_r} = a^{i_1}_{k_1} \cdot a^{i_2}_{k_2} \cdot \ldots \cdot T^{k_1, k_2, \ldots, k_r}\,. \qquad (1.13)$$

Analogicky kovariantní a smíšené tenzory.

Souvislost mezi kovariantními a kontravariantními složkami tenzorů, tj. „zvedání a spouštění“ indexů, se uskutečňuje přes metrický tenzor, tj. ve STR přes Minkowského tenzor η_{ik}.
Např.

$$T_{ik} = \eta_{im} T_k^m = \eta_{il} \eta_{kl} T^{lm} . \qquad (1.14)$$

Při použité Minkowského metrice platí jednoduché pravidlo: při zvedání a spouštění prostorových indexů (1, 2, 3) se hodnoty komponent tenzoru nemění, při zvedání a spouštění časového indexu (0) se mění znaménko této složky.
Máme-li skalární , vektorové či tenzorové veličiny definovány ve všech bodech dané oblasti prostoročasu, hovoříme o skalárních, vektorových a tenzorových polích.
Diferenciální operátor $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ budeme kvůli zjednodušení zápisu označovat indexem za čárkou: $,_i$.
Čtyřgradientem skalárního pole $\varphi = \varphi(x^i)$ budeme rozumět čtyřvektor, jehož kovariantní složky jsou

$$\varphi,_i \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, grad\ \varphi \right). \qquad (1.15)$$

Čtyřdivergencí vektorového pole $A^i = A^i(x^k)$ rozumíme skalární pole

$$A^i,_i \equiv \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{\partial A^0}{\partial t} + div\ \mathbf{A} . \qquad (1.16)$$

Analogicky, čtyřdivergencí tenzorového pole T^{ik} je vektorové pole

$$T^{ik},_k \equiv \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = T^i . \qquad (1.17)$$

Diferenciální operátor $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ je zobecněním Hamiltonova operátoru nabla:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (1.18)$$

Prostoročasovým zobecněním Laplaceova diferenciálního operátoru delta:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1.19)$$

je D′Alembertův operátor

$$\Box = \eta^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{x^k} = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (1.20)$$

tedy

$$\Box\varphi = \varphi'^{i}{}_{,i} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (1.21)$$

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717 – 1783)

Gaussova věta vektorové analýzy v trojrozměrném eukleidovském prostoru

$$\int_V div\, \mathbf{A}\, dV = \oint_S \mathbf{A}\, d\mathbf{S}, \qquad (1.22)$$

podle níž je integrál divergence vektoru přes daný objem *V* roven toku tohoto vektoru přes uzavřenou plochu $S = \partial V$ ohraničující tento objem, se ve čtyřrozměrném prostoročase zobecňuje na tvar

$$\int_V A^i{}_{,i}\, d\Omega = \oint_o A^i\, dS_i \,, \qquad (1.23)$$

kde

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c \cdot t \cdot dV \qquad (1.24)$$

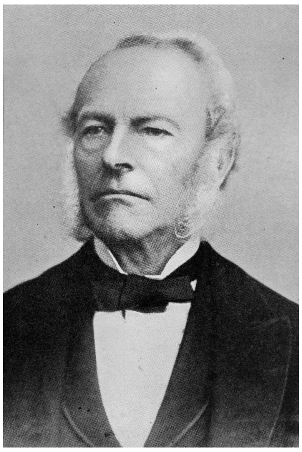
je element čtyřobjemu v prostoročase a dS^i jsou složky čtyřvektoru elementu hyperplochy $\varphi = \partial\Omega$ ohraničující čtyřobjem Ω přes který se integruje na levé straně

$$\begin{aligned} dS^0 &= dx^1 dx^2 dx^3 = dV \\ dS^1 &= dx^0 dx^2 dx^3 \\ dS^2 &= dx^0 dx^1 dx^3 \\ dS^3 &= dx^0 dx^1 dx^2 \,. \end{aligned} \qquad (1.25)$$

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Vztah mezi křivkovým integrálem vektoru přes uzavřenou křivku *C* a plošným integrálem přes plochu *S* ohraničenou křivkou *C* je v trojrozměrné vektorové analýze dán Stokesovou větou

$$\oint_C \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \int_S rot\ \mathbf{A}\, d\mathbf{S}\,. \qquad (1.26)$$



Sir George Gabriel Stokes (1819 – 1903)

Integrál podél uzavřené čtyřrozměrné křivky *C* převádíme na integrál přes hyperplochu *σ* ohraničenou touto křivkou obecně tak, že dx^i nahradíme $dS^{ik} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

Přímé zobecnění Stokesovy věty pro křivkový integrál čtyřvektoru A^i pak zní:

$$\oint_C A_i\, dx^i = \int_\sigma A_{i,k}\, dS^{ki} = \frac{1}{2}\int_\sigma \left(A_{k,i} - A_{i,k} \right) dS^{ik}\,, \qquad (1.27)$$

přičemž komponenty antisymetrického tenzoru plochy

$$dS^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i \qquad (1.28)$$

udávají projekce plošného elementu braného jako rovnoběžník se stranami dx^i a dx'^i, do souřadnicových rovin.

Analogicky je tomu pro tenzory vyšších řádů.

V inerciální vztažné soustavě $\tilde{\Sigma}$ v kartézských souřadnicích $\tilde{x}^i$ má element prostoročasového intervalu tvar

$$ds^2 = \eta_{ik}\, d\tilde{x}^i d\tilde{x}^k\ . \qquad (1.29)$$

Přejdeme-li k libovolné soustavě prostoročasových souřadnic $\tilde{x}^i$ v obecně neinerciální vztažné soustavě Σ pomocí transformace

$$x^i = x^i\left(\tilde{x}^k\right), \qquad (1.30)$$

bude v těchto nových souřadnicích x^i prostoročasový interval mít tvar

$$ds^2 = g_{ik}\left(x^j\right)\cdot dx^i dx^k, \qquad (1.31)$$

kde

$$g_{ik}\left(x^j\right) = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k}\eta_{lm}. \qquad (1.32)$$

jelikož vztažné soustavy $\tilde{\Sigma}$ a Σ se vzhledem k sobě pohybují se zrychlením, transformace $\Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ nebude pevnou Lorentzovou transformací a veličiny $\frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k}$ budou obecně funkcemi místa a času.
Neinerciální vztažné systémy jsou z matematického hlediska vlastně soustavami křivočarých prostoročasových souřadnic.
Místo konstant η_{ik} se zde objevují nové veličiny $g_{ik}(x^j)$, jejichž funkční závislost na souřadnicích x_j charakterizuje vztah soustavy Σ s novými souřadnicemi x^j k původní inerciální soustavě $\tilde{\Sigma}$ s kartézskými souřadnicemi $\tilde{x}^j$.
Protože veličiny g_{ik} udávají předpis jak pomocí rozdílů souřadnic měřit skutečné vzdálenosti v prostoročase, nazývají se v diferenciální geometrii metrickým tenzorem.
Rovnice pohybu volné testovací částice v inerciální soustavě $\tilde{\Sigma}$:

$$\frac{d^2\tilde{x}^i}{ds^2} = 0, \qquad (1.33)$$

vyjádřená v obecné vztažné soustavě Σ, tj. v křivočarých prostoročasových souřadnicích x^i má tvar

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^m}\frac{\partial^2 \tilde{x}^m}{\partial x^k \partial x^l}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} = 0. \qquad (1.34)$$

Ta to rovnice je invariantní vzhledem k libovolné transformaci souřadnic $x^i \to x'^i$.
Rovnice pohybu volné hmotné částice při použití obecných křivočarých prostoročasových souřadnic x^i, tj. v obecně neinerciální vztažné soustavě má tedy tvar tzv. **rovnice geodetiky**:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} = 0, \qquad (1.35)$$

kde

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \qquad (1.36)$$

jsou tzv. **Christoffelovy koeficienty afinní konexe**.


Elwin Bruno Christoffel (1829 – 1900)

Tyto veličiny, popisující působení zdánlivých setrvačných sil na pohyb testovací částice, obsahují složky metrického tenzoru a jeho derivace. Vidíme tedy, že pomocí veličin g_{ik}, tj. pomocí metriky, lze zachytit i zdánlivé síly působící na hmotná tělesa v neinerciálních vztažných soustavách Σ.
Fyzikální zákony jsou vyjádřeny diferenciálními rovnicemi mezi vektorovými a tenzorovými poli v prostoročase.

Obyčejná parciální derivace vektorového pole A^i podle souřadnic x^k

$$A^i{}_{,k} \equiv \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x^k \to 0} \frac{A^i\left(x^k + \Delta x^k\right) - A^i\left(x^k\right)}{\Delta x^k} \qquad (1.37)$$

je obvykle mírou toho, jak se vektorové pole A^i mění s místem, tj. od bodu o souřadnicích x^k k sousednímu bodu o souřadnicích $x^k + \Delta x^k$.
Při použití křivočarých souřadnic pro objektivní porovnání vektorů a tenzorů zadaných v různých bodech prostoročasu však nelze bezprostředně použít jejich složky počítané vzhledem k lokální bázi, neboť ta se může v zakřiveném prostoročase měnit bod od bodu.
Složky vektorových a tenzorových polí se za použití křivočarých souřadnic mění se změnou polohy v prostoročase ze dvou důvodů.
Jednak z důvodu již zmíněné prostoročasové proměnlivosti vektorové báze vzhledem k níž jsou složky vektorů a tenzorů stanovovány, a jednak též proto, že daná pole se skutečně fyzikálně mění s místem.
Obyčejná parciální derivace (1.37) zde pak již nevyjadřuje objektivní změny vektorových a tenzorových polí, neboť např. i konstantní vektorové pole bude mít v křivočarých souřadnicích proměnné složky a tedy nenulové parciální derivace svých komponent.
Kromě toho se $A^i{}_{,k}$ netransformuje jako tenzor, neboť je rozdílem vektorů A^i v různých bodech, kde mohou být různé transformační koeficienty.
Z toho důvodu je nutno použít patřičnou konexi: nejprve vektory přenést paralelně do jednoho společného bodu a pak teprve porovnávat jejich komponenty.
Při paralelním přenosu vektoru se jeho složky v kartézské soustavě souřadnic nemění.
Za použití křivočaré souřadné soustavy se však při paralelním přenosu vektoru A^i z bodu o souřadnicích x^k do blízkého bodu $x^k + \Delta x^k$ změní složky tohoto vektoru o

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^l \Delta x^k . \qquad (1.38)$$

Je zřejmé, že Christoffelovy koeficienty Γ^i_{kl} nemohou tvořit tenzor, neboť přechodem z kartézské soustavy, kde jsou všechny rovny nule, ke křivočaré soustavě se stávají nenulovými, a naopak, při nenulových Γ^i_{kl}

lze všechny složky anulovat přechodem ke kartézské soustavě v daném bodě.
Z předpokladu, aby se δA^i v zákonu paralelního přenosu (1.38) transformovali jako vektor plyne transformační vztah pro koeficienty afinní konexe:

$$\Gamma'^i_{kl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x'^r} \frac{\partial x^s}{\partial x'^l} \Gamma^q_{rs} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^q} \frac{\partial^2 x^q}{\partial x'^k \partial x'^l}. \qquad (1.39)$$

Z toho je patrno, že koeficienty konexe se chovají jako tenzory pouze při lineárních transformacích souřadnic.
Výsledné složky vektoru $A^i(x^k)$ přeneseného paralelně do bodu $x^k + \Delta x^k$ budou

$$A^i\left(x^k \rightarrow x^k + \Delta x^k\right) = A^i\left(x^k\right) + \delta A^i. \qquad (1.40)$$

Z požadavku invariance pravidel tenzorové algebry s paralelním přenosem plyne na základě (1.38) zákon pro paralelní přenos obecného tenzoru $T^{ij\ldots}_{rs\ldots}$:

$$\begin{aligned} \delta T^{ij\ldots}_{rs\ldots} &= -\Gamma^i_{mn} T^{mj\ldots}_{rs\ldots} \Delta x^n - \Gamma^j_{mn} T^{im\ldots}_{rs\ldots} \Delta x^n - \ldots + \\ &+ \Gamma^m_{rn} T^{ij\ldots}_{ms\ldots} \Delta x^n + \Gamma^m_{sn} T^{ij\ldots}_{rm\ldots} \Delta x^n + \ldots . \end{aligned} \qquad (1.41)$$

Oprava parciální derivace (1.37) na změnu vektorové báze způsobenou křivočarostí souřadnic pak spočívá v tom, že se při derivování nejprve provede paralelní přenos vektoru $A^i(x^k + \Delta x^k)$ z bodu $x^k + \Delta x^k$ zpět do bodu x^k a pak se teprve provede příslušná limita:

$$\begin{aligned} A^i{}_{;k} &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x^k \rightarrow 0} \frac{A^i\left(x^k + \Delta x^k \rightarrow x^k\right) - A^i\left(x^k\right)}{\Delta x^k} = \\ &= \lim_{\Delta x^k \rightarrow 0} \frac{A^i\left(x^k + \Delta x^k\right) + \Gamma^i_{km} A^m - A^i\left(x^k\right)}{\Delta x^k}. \end{aligned} \qquad (1.42)$$

Tím je dosaženo toho, že se bere rozdíl komponent vektorů počítaných v jediném bodě x^k a tedy vztahovaných k téže bázi.

Tato tzv. **Christoffelova kovariantní derivace**, tj. parciální derivace opravená na konexi, již vyjadřuje skutečné změny fyzikálních veličin (proměnnost vektorových a tenzorových polí) a má tenzorové transformační vlastnosti.
Podle (1.37) a (1.42) je Christoffelova kovariantní derivace vektoru A^i rovna

$$A^i{}_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km} A^m = A^i{}_{,k} + \Gamma^i_{km} A^m, \qquad (1.43)$$

a podobně

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik} A_m = A_{i,k} - \Gamma^m_{ik} A_m. \qquad (1.44)$$

Nahradíme-li v (1.42) vektor A^i obecným tenzorem $T^{ij\ldots}_{rs\ldots}$, dostaneme na základě zákona paralelního přenosu (1.41) obecné pravidlo pro kovariantní derivování tenzorů:

$$T^{ij\ldots}_{rs\ldots;w} = T^{ij\ldots}_{rs\ldots,w} + \Gamma^i_{wm} T^{mj\ldots}_{rs\ldots} + \Gamma^j_{wm} T^{im\ldots}_{rs\ldots} + \ldots - \Gamma^m_{rw} T^{ij\ldots}_{ms\ldots} - \Gamma^m_{sw} T^{ij\ldots}_{rm\ldots} - \ldots \,. \qquad (1.45)$$

Je pozoruhodné, že i kovariantní derivace splňuje Leibnitzovo pravidlo pro derivování součinu:

$$\left(t^{i\ldots}_{j\ldots} \cdot u^{l\ldots}_{m\ldots}\right)_{;k} = t^{i\ldots}_{j\ldots;k} \cdot u^{l\ldots}_{m\ldots} + t^{i\ldots}_{m\ldots} \cdot u^{l\ldots}_{m\ldots;k} \,. \qquad (1.46)$$

Obdobná je situace pří derivování vektorových a tenzorových polí podél křivky *C* zadané parametricky, rovnicí

$$x^k = x^k(\lambda), \qquad (1.47)$$

tj. při derivování polí dle parametru λ.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716)

Aby tato derivace vyjadřovala skutečné změny vektorového pole podél křivky C, musíme ji rovněž opravit na konexi, čímž vznikne tzv. **totální derivace** vektoru A^i podél křivky C: $[x^k = x^k(\lambda)]$:

$$\left.\frac{DA^i(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{A^i(\lambda\to\lambda_0) - A^i(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} =$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{A^i(\lambda) - A^i(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} + \Gamma^i_{kl} x^j(\lambda_0)\cdot A^k(\lambda_0) \left.\frac{dx^l}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} =$$

$$= \left.\frac{dA^i(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} + \Gamma^i_{kl} x^j(\lambda_0)\cdot A^k(\lambda_0) \left.\frac{dx^l}{d\lambda}\right|_{\lambda_0}, \qquad (1.48)$$

přičemž $A^i(\lambda) \equiv A^i(x^k(\lambda))$ jsou složky vektoru A^i v bodě x^k na křivce C daném hodnotou parametru λ.
Je-li vektorové pole A^i definovaného nejen na křivce C ale i v okolním prostoru, je vztah mezi totální a kovariantní derivací následující:

$$\frac{DA^i}{d\lambda} = A^i{}_{,k} + \Gamma^i_{kl} A^l \frac{dx^k}{d\lambda} = A^i{}_{;k} \frac{dx^k}{d\lambda}, \qquad (1.49)$$

kde pro jednoduchost již není explicitně vyznačeno, že se počítá v bodě křivky C o parametru $\lambda = \lambda_o$.
Analogicky pro totální derivace tenzorů vyšších řádů.
Snadno lze odvodit důležitou rovnici

$$g_{ik;l} = g^{ik}{}_{;l} = 0 , \qquad (1.50)$$

která říká, že metrický tenzor je kovariantně konstantní, takže např. nezáleží na tom, zda zvedáme a spouštíme tenzorové indexy před nebo po provedení kovariantní derivace.
Složky koeficientů konexe $\Gamma^i{}_{kl}$ a metrického tenzoru g_{ik} závisejí na souřadnicové soustavě a na první pohled na nich nepoznáme, zda odpovídají rovinnému prostoru v němž jsou použity křivočaré souřadnice, nebo prostoru zakřivenému.
Rozbor vlastností paralelního přenosu však umožňuje nalézt obecné kritérium plochosti prostoru a stanovit kvantitativně míru jeho zakřivení.
Pod nezakřiveným prostorem rozumíme obecně takový prostor, v němž lze metrickou formu patřičnou transformací souřadnic převést na tvar

$$ds^2 = \sum K_i \cdot \left(d\tilde{x}^i \right)^2 , \qquad (1.51)$$

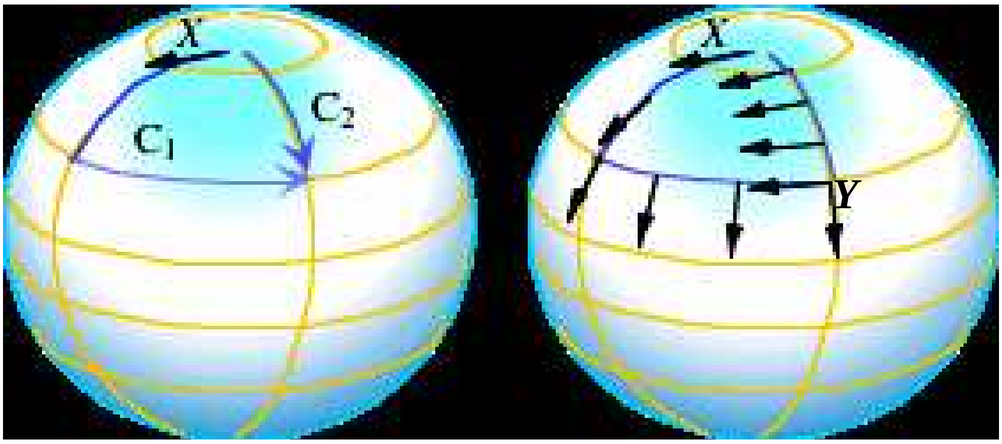
kde jednotlivé konstantní koeficienty K_i mohou nabývat hodnot 1 resp. -1.
Kritériem nezakřivenosti prostoru je tedy možnost zavedení globální kartézské nebo pseudokartézské souřadné soustavy.
Máme -li v plochém prostoru zavedenou takovou kartézskou soustavu souřadnic, pak vektor přenesený paralelně z jednoho bodu do druhého nemění své komponenty.
V křivočaré soustavě se komponenty vektoru při paralelním přenosu mění, avšak z existence kartézské souřadnicové soustavy plyne, že v rovinném prostoru paralelní přenos nezávisí na cestě po níž se realizuje.
Změny složek závisejí pouze na počátečním a koncovém bodě.
Přeneseme-li tedy vektor podél libovolné uzavřené křivky, pak po návratu do výchozího bodu budou splývat složky přeneseného a původního vektoru.
Afinní konexe mající tuto vlastnost se nazývá **integrabilní**.
Při symetrické konexi je integrabilita afinní konexe nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby byl prostor rovinný.
V obecném případě však jsou $\Gamma^i{}_{kl}$ funkcemi souřadnic a paralelní přenos bude záviset na dráze.

Konexe již nebude integrabilní:

$$A^i_{C_1} \equiv \int_{A\widehat{C}_1}^{B} \Gamma^i_{kl} A^k dx^l \neq \int_{A\widehat{C}_1}^{B} \Gamma^i_{kl} A^k dx^l \equiv A^i_{C_2} \,, \qquad (1.52)$$

kde $A^i_{C_1}$ jsou složky vektoru A^i přeneseného paralelně z bodu A do bodu B podél křivky C_1 a $A^i_{C_2}$ je výsledek přenosu mezi těmito body křivky C_2 .

Obr. 1.1



V zakřiveném prostoru (např. na kulové ploše) výsledek paralelního přenosu vektoru z daného bodu *X* do bodu *Y* závisí na cestě, po níž se přenos uskutečňuje.Tato neintegrabilita afinní konexe v zakřiveném prostoru způsobuje, že vektor přenesený paralelně podél uzavřené křivky *C* se po návratu zpět do výchozího bodu bude lišit od původního vektoru.

Provedeme-li v tomto případě paralelní přenos podél uzavřené křivky, vrátíme se do výchozího bodu obecně s jiným vektorem.
Velikost tohoto přeneseného vektoru bude podle vztahu metriky a konexe v Riemannově prostoru stejná, změní se však jeho směr.
Odchylka tohoto přeneseného vektoru od vektoru původního, vztažená na jednotku plochy obklopené uzavřenou křivkou *C* podél níž se přenos prováděl, je pak mírou neintegrability konexe, tj. charakterizuje rozdílnost geometrie uvažovaného prostoru od eukleidovosti čili stupeň jeho zakřivení.
Změna vektoru při paralelním přenosu vektoru **A** podél uzavřené křivky *C* je

$$A^i = -\oint_C \Gamma^i_{kl} A^k \, dx^l \, . \qquad (1.53)$$

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Tento křivkový integrál obecně nelze převést na plošný integrál pomocí Stokesovy věty, neboť hodnoty složek vektoru A^i v bodech příslušné plochy uvnitř křivky C nelze jednoznačně určit.
Závisejí totiž na cestě po které při rozšiřování vektorového pole s vektorem A^i k danému bodu přicházíme.
Jestliže je však křivka C infinitesimální, v limitním přechodu se tato nejednoznačnost neuplatní.
Příslušná chyba bude až druhého řádu.
Proměnnost vektorového pole A^i s tímto místem je jen díky konexi, takže

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{kl} A^k \, , \qquad (1.54)$$

a Stokesova věta dává

$$\Delta A^i = -\frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial\left(\Gamma^i_{km}A^k\right)}{\partial x^l} - \frac{\partial\left(\Gamma^i_{kl}A^k\right)}{\partial x^m}\right] dS^{lm} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{mn}\Gamma^n_{kl}\right]\cdot A^k \Delta S^{lm} = \qquad (1.55)$$

$$= -\frac{1}{2} R^i_{klm} A^k \Delta S^{lm} ,$$

kde ΔS^{lm} je tenzor plochy ohraničené nekonečně malou uzavřenou křivkou *C*.
Tenzor $R^i{}_{klm}$, který kvantifikuje neintegrabilitu afinní konexe, tj. zakřivenost daného prostoru se nazývá **Riemannův – Christoffelův tenzor křivosti**.
V plochém prostoru je vždy možno zvolit takovou kartézskou soustavu souřadnic, v níž jsou všechny složky $\Gamma^i{}_{kl}$ nulové, a proto je zde tenzor křivosti rovněž nulový.
Díky tenzorovému charakteru $R^i{}_{klm}$ to platí i v každé jiné (třeba křivočaré) soustavě souřadnic.
Obráceně, jestliže je tenzor křivosti všude nulový, je paralelní přenos jednoznačný a nezávislý na cestě, takže lokálně kartézskou soustavu zavedenou v jednom bodě lze paralelně přenést a rozšířit do všech ostatních bodů, tj. zkonstruovat globální kartézskou soustavu – prostor je rovinný.
Rovnice

$$R^i_{klm} = 0 \qquad (1.56)$$

je tedy obecným kritériem eukleidovosti resp. pseudoeukleidovosti libovolného prostoru popsaného tenzorovými poli $\Gamma^i{}_{kl}$ popř. g_{ik}.
Z (1.55) plynou pro tenzor křivosti následující vztahy:

$$R^i_{klm} = -R^i_{klm} \; , \qquad (1.57)$$

$$R^i_{klm} + R^i_{mkl} + R^i_{lmk} = 0 , \qquad (1.58)$$

$$R_{iklm} = g_{ij} R^j_{klm} = -R_{kilm} = -R_{iklm} = R_{lmik} . \qquad (1.59)$$

Eukleidés z Megary (325 – 260 př. n. l.)

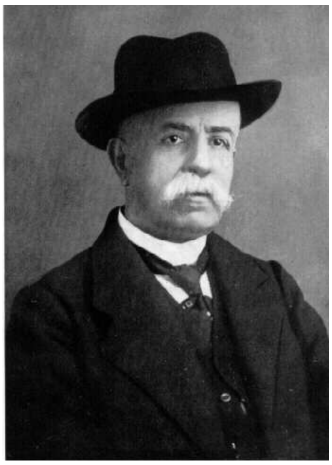
Podle posledního vztahu jsou ty komponenty tenzoru křivosti, jež mají $i = k$ nebo $l = m$ rovny nule.
Tenzor 4. řádu v N-rozměrném prostoru má obecně celkem N^4 složek, což ve čtyřrozměrném prostoru dá 256 složek.
Vzhledem k algebraickým identitám (1.57), (1.58), (1.59) však počet algebraicky nezávislých složek tenzoru křivosti činí pouze

$$\frac{N^2\left(N^2-1\right)}{12} = 20 \qquad (1.60)$$

Kontrakcí tenzoru $R^i{}_{klm}$ v indexech i, l což je jediná kontrakce dávající nenulový výsledek, dostaneme tzv. **Ricciho tenzor křivosti**

$$R_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} R^m_{imk} = g^{ml} R_{milk}\,, \qquad (1.61)$$

který je symetrický.



Gregorio Ricci-Curbastro (1853 – 1925)

Další kontrakcí získáme invariant zvaný skalární křivost daného prostoru:

$$R \overset{\text{def}}{=} g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{milk} \,. \tag{1.62}$$

Kromě algebraických symetrií splňuje tenzor křivosti též důležité tzv. **Bianchiho diferenciální identity**:

$$R^i_{klm;\,j} + R^i_{kjl;m} + R^i_{kmj;l} = 0 \,. \tag{1.63}$$

Luigi Bianchi (1856 – 1928)

Kontrakcí této rovnice v indexech *i* a *l* a vynásobením g^{jk} dostaneme, vzhledem ke kovariantní konstantnosti metrického tenzoru

$$g^{jk}{}_{;n} = 0 \qquad \left(R^j_l - \delta^j_l \cdot \frac{R}{2} \right)_{;\,j} = 0 \,, \tag{1.64}$$

což lze zapsat ve tvaru

$$G^{ik}{}_{;k} = 0 \,, \tag{1.65}$$

kde

$$G_{ik} \overset{\text{def}}{=} R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \cdot R \tag{1.66}$$

je tzv. **Einsteinův tenzor křivosti**.
Tenzor křivosti figuruje ve všech jevech při nichž se uplatňuje zakřivení prostoročasu.
V plochém prostoru jsou druhé parciální derivace vektorů podle souřadnic komutativní.

$$A^i{}_{,k,l} = A^i{}_{,l,k} \tag{1.67}$$

a stejně tak i derivace kovariantní:

$$A^i{}_{;k;l} = A^i{}_{;l;k}\,. \tag{1.68}$$

V obecném případě však podle (1.45) platí

$$A^i{}_{;k;l} - A^i{}_{;l;k} = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{mk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{nk}\Gamma^n_{ml} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{mk} \right) A^m = R^i_{mkl} A^m, \tag{1.69}$$

takže kovariantní derivace jsou obecně nekomutativní a mírou této nekomutativity je tenzor křivosti $R^i{}_{klm}$.
dosud jsme byli svědky toho, že lze konstruovat tenzory s libovolným počtem indexů nahoře i dole.
nyní se zaměříme na možnosti zavedení „polovičních“ indexů, abychom veličinu transformující se jako vektor mohli získat coby součin dvou elementárnějších objektů, podobně, jako lze získat tenzor druhého řádu tenzorovým násobením dvou vektorů.
Tyto objekty nazýváme **spinory**.
Ze složek reálného čtyřvektoru A^i lze sestavit čtyři kombinace:

$$\begin{aligned} A^{0\bar{0}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 + x^3\right), & A^{0\bar{1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^1 + x^2 i\right) \\ A^{1\bar{0}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^1 - x^3 i\right), & A^{1\bar{1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 - x\right), \end{aligned} \tag{1.70}$$

které však již nejsou reálné, ale splňují rovnost

$$A^{a\bar{b}} = \overline{A^{b\bar{a}}}\,, \tag{1.71}$$

kde indexy a, b nabývají hodnot 0, 1 a indexy $\bar{a}, \bar{b}$ hodnot $\bar{0}, \bar{1}$.
Existuje-li nějaký spinor $S^{abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{g}}$, potom existuje též spinor $S^{defg\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$, který má komplexně sdružené složky.
Spinor se stejným počtem pruhovaných a nepruhovaných indexů splňuje určitou podmínku reálnosti, analogickou podmínce pro vektor.
Např.

$$S^{00010\bar{1}\bar{0}\bar{1}\bar{0}\bar{1}} = S^{10101\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{1}\bar{0}}, \qquad (1.72)$$

přičemž

$$S^{00011\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{1}\bar{1}} \in \mathbb{R} \qquad (1.73)$$

Čtverec délky čtyřvektoru (1.7) lze potom psát coby dvojnásobek determinantu matice se složkami (70):

$$A^2 = A^i A_i = \eta_{ik} A^i A^k = -2 \cdot \begin{vmatrix} A^{0\bar{0}} & A^{0\bar{1}} \\ A^{1\bar{0}} & A^{1\bar{1}} \end{vmatrix} . \qquad (1.74)$$

Přechod od starých souřadnic k novým lze realizovat na grupě ***SL***(2,ℂ) namísto Lorentzovy grupy ***SO***(1,3), jež je s ní izomorfní.
Mějmež tedy soubor čtyř komplexních čísel $t^a_{a'}$, což je matice přechodu od nečárkované báze k čárkované:

$$S^a = t^a_{a'} S^{a'}, \qquad (1.75)$$

umožňující výpočet souřadnic v nečárkované bázi z těch v bázi čárkované.
Dále pod $t^{\bar{a}}_{\bar{a}'}$ mějme na mysli komplexně sdružená čísla.
Potom lze vyjádřit libovolný spinor (s horními indexy) v nečárkované bázi.
Např. vektor

$$A^{a\bar{b}} = t^a_{a'} t^{\bar{b}}_{\bar{b}'} A^{a'\bar{b}'}. \qquad (1.76)$$

Použitím antisymetrických spinorů se dvěma indexy dole

$$\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba} \,, \qquad \varepsilon_{\bar{a}\bar{b}} = -\varepsilon_{\bar{b}\bar{a}} \,, \qquad \varepsilon_{01} = -\varepsilon_{\bar{0}\bar{1}} = -1 \qquad (1.77)$$

lze čtverec délky čtyřvektoru (1.7) psát jako

$$\varepsilon_{ab}\varepsilon_{\bar{a}\bar{b}} A^{a\bar{a}} A^{b\bar{b}} \,, \qquad (1.78)$$

přičemž a a $\bar{a}$ či b a $\bar{b}$ zde spolu nijak nesouvisejí.
Podmínka pro invarianci ε^{ab} vůči transformaci (1.78) je právě podmínkou pro unimodularitu transformační matice, tj.:

$$\varepsilon^{ab} = t^{a}_{a'}\, t^{b}_{b'}\, \varepsilon^{a'b'} \,. \qquad (1.79)$$

Můžeme se přesvědčit, že podmínku (1.71) bude splňovat vektor i po transformaci, splňoval-li ji před ní (a stejně tak pro víceindexové spinory).
Navíc, jako obdobu zvedání a spouštění indexů pomocí η_{ik}

$$A_i = \eta_{ik} A^k \qquad (1.80)$$

budeme spouštět a zvedat indexy pomocí ε_{ab} .
Je zde ovšem třeba dbát na pořadí indexů, neboť ε_{ab} je antisymetrický:

$$\lambda_b = \lambda^a \varepsilon_{ab} \,, \qquad \lambda^c = \varepsilon^{cd} \lambda_d \,. \qquad (1.81)$$

Obdobně pro víceindexové spinory (ostatní indexy beze změny) a pro pruhované indexy.
Nyní si budeme všímat jen případu spinoru, symetrického vůči permutacím ve dvou skupinách indexů.
Není obtížné násobným provedením následujících úvah rozložit spinor na součiny ε symbolů a spinorů symetrických vůči záměně nějakých dvou indexů, dále na součiny ε a spinorů symetrických vůči permutacím ve dvou skupinách z nichž jednou je právě ona dvojice, atd.

Náš případ bude ukazovat to, co se dá fyzikálně popsat jako skládání impulsmomentů.
Mějmež kupř. dva různé spinory $A_{(i)abc}$, $B_{(i)defg}$ symetrické vůči všem permutacím indexů.
V takovém případě závisí pouze na tom, kolik indexů z množiny $\{a, b, c\}$ resp. $\{d, e, f, g\}$ je jednička.
Pokud má spinor k spinorových indexů, můžeme mezi nimi najít 0 až k jedniček a tedy obsahuje $k + 1$ nezávislých složek.
Částici popisované takovým spinorem připisujeme $s = \frac{k}{2}$.
$k + 1 = 2s + 1$ složek bude odpovídat amplitudám pravděpodobnosti, že se částice nachází ve stavu s průmětem spinu do osy z:

$$s_z = -s, -s+1, ..., s-1, ..., s\,. \tag{1.82}$$

Spinor $S_{abc,defg}$ symetrický vůči permutacím v obou skupinách

$$S_{abc,defg} = S_{bac,defg} = S_{abc,edfg} = \ldots\ , \tag{1.83}$$

který si lze představit např. jako nějakou sumu

$$S_{abc,defg} = \sum_i A_{abc} B_{defg}\ , \tag{1.84}$$

lze rozložit způsobem

$$S_{abc,defg} = sym_{abd}\, sym_{defg} \left(S^{7/2}_{abcdefg} + S^{5/2}_{abdef^{\varepsilon}cg} + S^{3/2}_{ade^{\varepsilon}bf^{\varepsilon}cg} + S^{1/2}_{d^{\varepsilon}ae^{\varepsilon}bf^{\varepsilon}cg} \right), \tag{85}$$

kde čísla 7/2, ... , 1/2 znamenají polovinu počtu indexů, tj. spin.
Spinory $S^{7/2}_{abcdefg}$ lze spočítat zpětně jako např.

$$S^{5/2}_{abcdef} = k \cdot sym_{abdef}\, S^{cg}_{abc,defg^{\varepsilon}}\ , \tag{1.86}$$

ovšem kombinatorickou konstantu k není lehké spočítat.

Fyzikálně se věc vykládá tak, že dvě částice A, B se spiny s_a , s_b (v našem případě 3/2 a 2) mohou spolu vytvořit částici se spinem z intervalu

$$s_a + s_b,\ s_a + s_b - 1,\ s_a + s_b - 2, \dots, \left|s_a - s_b\right|. \qquad (1.87)$$

Zaměřme se nyní na Lorentzovy transformace, fixující navíc jakýkoliv vektor ve směru toku času, tedy i vektor

$$V^{a\bar{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.88)$$

délky $\sqrt{2}$ tj.

$$V^i = \left(\sqrt{2},0,0,0\right). \qquad (1.89)$$

pomocí něhož lze přepočítávat horní nepruhované indexy na dolní pruhované a naopak:

$$S^a = V^{a\bar{b}} S_{\bar{b}}\ , \qquad S^{\bar{b}} = S_a V^{a\bar{b}}\ . \qquad (1.90)$$

Ve vzorci (71) pro invarianci $V^{a\bar{b}}$ napsaném jako

$$V^{a\bar{b}} = t^a_{a'} V^{a'\bar{b}'} t_{\bar{b}'}{}^{\bar{b}} = V^{a'\bar{b}'}, \qquad (1.91)$$

kde $t_{\bar{b}'}{}^{\bar{b}}$ zde znamená $t^{\bar{b}}_{\bar{b}'} = \overline{t^{b}_{b'}}$, lze interpretovat $\hat{\mathbf{V}}$ jako jednotkovou matici, a tak navíc o matici přechodu *t*, o níž již víme, že je unimodulární, můžeme říci, že je také unitární ($tt^* = \hat{\mathbf{E}}$).
Takové transformace jednoduše tvoří podgrupu ***SU***(2) grupy ***SL***(2, ℂ). Pro matice z této podgrupy

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad (1.92)$$

tedy platí $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}^* = \hat{\mathbf{E}}$ z čehož mimo jiné plyne

$$\alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\delta} = 0. \qquad (1.93)$$

Navíc má být determinant jednotkový

$$1 = \alpha\delta - \beta\gamma = -\frac{\alpha\overline{\alpha}\gamma}{\overline{\beta}} - \beta\gamma = -\frac{\gamma}{\overline{\beta}}\left(\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta}\right), \qquad (1.94)$$

ale protože $\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1$ máme výsledné $\gamma = -\overline{\beta}$ a odtud také $\delta = \overline{\alpha}$.
Matici (1.92) tedy můžeme psát ve tvaru

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}. \qquad (1.95)$$

tím dostáváme množinu matic izomorfní tělesu kvaternionů.
Všimněme si, že označíme-li Q^{JJ} komplexní matici $2n \times 2n$ vzniklou z kvaternionické matice $\hat{\mathbf{Q}}$ rozepsáním

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}, \qquad (1.96)$$

pak platí rovnost

$$\left(Q^*\right)^{JJ} = \left(Q^{JJ}\right)^*, \qquad (1.97)$$

kde pod adjungovanou maticí míníme matici transponovanou a kvaternionicky sdruženou:

$$\left(\alpha + \beta i + \gamma i + \delta k\right)^* = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k. \qquad (1.98)$$

Symplektická grupa ***Sp***(2*n*) mající dimenzi $n\cdot(2n + 1)$ obsahující komplexní unitární symplektické matice rozměru $2n \times 2n$, tj. matice splňující rovnosti

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}^* = \hat{\mathbf{E}}, \tag{1.99}$$

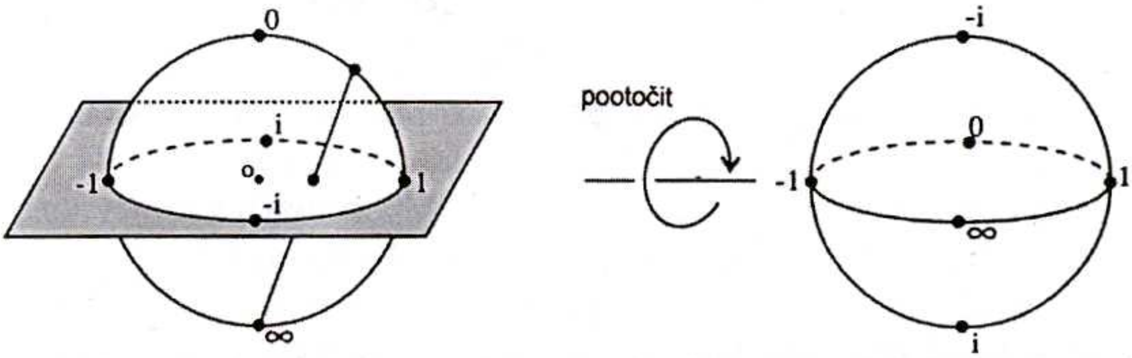
$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{K}}, \tag{1.100}$$

kde $\hat{\mathbf{K}}$ je nějaká regulární antisymetrická matice (antisymetrická matice lichého rozměru je vždy singulární, proto 2*n*), tedy není ničím jiným, nežli grupou unitárních matic $n \times n$ nad tělesem $\mathbb{H}$ všech kvaternionů, což je důvod proč ji někteří zapisují též jako ***Sp***(*n*), či ***U***($n,\mathbb{H}$).
Za matici $\hat{\mathbf{K}}$ z (1.100) bereme komplexní matici $2n \times 2n$, která je nulová kromě „tlusté“ diagonály tvořené *n* bloky typu 2×2, tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.101}$$

Snad neušlo vaší pozornosti, že při rotaci o 2π se změní spinory s lichým počtem indexů na opačné, a teprve při rotaci o 4π se vrátí na původní hodnotu.
Komplexní čísla můžeme znázornit buď v Gaussově rovině, nebo, přidáme-li bod v nekonečnu, na tzv. **Riemannově sféře**.
Sféru lze projektovat na rovinu spolu s bodem v nekonečnu.
Vezměme rovinu procházející rovníkem sféry a spojme každý bod na sféře s jižním pólem.
Bod, ve kterém tato přímka protne rovinu, je odpovídajícím bodem na Gaussově rovině.
Poznamenejme, že v tomto zobrazení se severní pól promítá do počátku, jižní pól do nekonečna a reálná osa je zobrazena na vertikální kružnici procházející severním a jižním pólem.

Obr. 1.2



Riemannova sféra reprezentující komplexní čísla spolu s ∞.

Sférou můžeme pootočit tak, že reálná čísla budou odpovídat rovníku.
Budiž dále dána funkce $f(x)$ reálné proměnné x nabývající komplexních hodnot.
Jak bylo řečeno výše, můžeme ji chápat jako funkci definovanou na rovníku.
Výhoda tohoto pohledu spočívá v tom, že existuje přirozené kritérium, které říká, zda je f složena z pozitivních či negativních frekvencí:
$f(x)$ se skládá z pozitivních frekvencí, jestliže může být prodloužena do holomorfní funkce na severní polokouli Riemannovy sféry.
Obdobně, $f(x)$ se skládá z negativních frekvencí jestliže může být prodloužena do holomorfní funkce na jižní hemisféře.
Vlnová funkce částice se spinem 1/2 může být v lineární superpozici stavů „nahoru“ a „dolů“

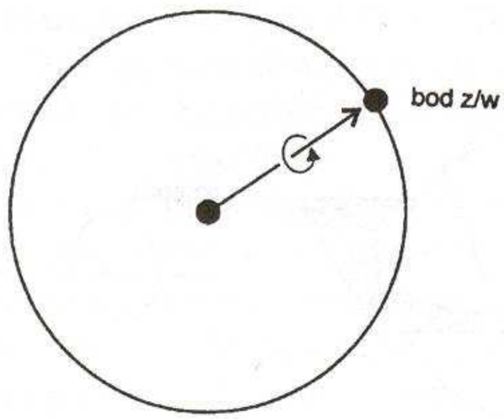
$$w|\uparrow\rangle + z|\downarrow\rangle. \qquad (1.102)$$

Tento stav může být reprezentován bodem $\frac{z}{w}$ na Riemannově sféře odpovídající bodu, kde osa spinu směřující z počátku kladným směrem protíná sféru (pro vyšší spiny existuje komplikovanější konstrukce nalezená v roce 1932 Majoranou).

Ettore Majorana (1906 – 1938)

To spojuje komplexní amplitudy kvantové mechaniky s prostoročasovou strukturou OTR.

Obr. 1.3

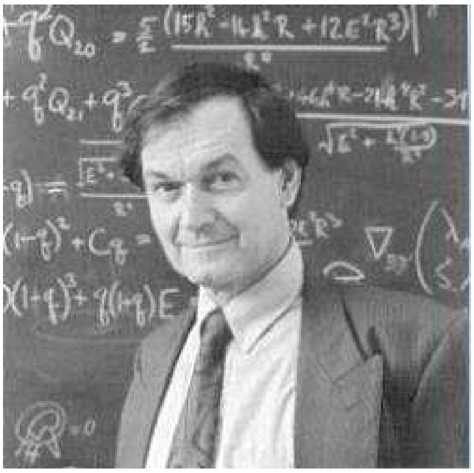


Prostor směrů spinu pro částici spinu 1/2 je Riemannova sféra poměrů amplitud w (spin nahoru) a z (spin dolů).

Představme si nyní pozorovatele nacházejícího se v bodě *P* prostoročasu a pozorujícího hvězdy.
Pokud by se nyní druhý pozorovatel prolétl bodem *P* ve stejný okamžik, ale s nulovou relativní rychlostí vzhledem k prvnímu, pak by díky relativistické aberaci zobrazil hvězdy na odlišná místa na sféře.
Tato odlišná umístění bodů na sféře jsou spojena speciální transformací zvanou **Möbiova transformace**.
Tyto transformace tvoří přesně grupu transformací zachovávajících komplexní strukturu Riemannovy sféry.

August Ferdinand Möbius (1790 – 1868)

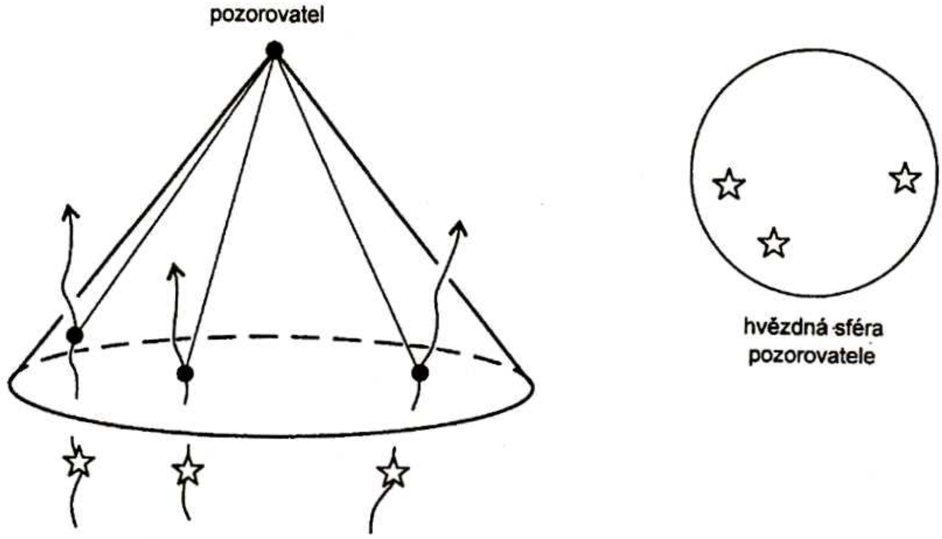
Proto je prostor světelných paprsků procházejících prostoročasovým bodem, tj. tzv. **Penroseův twistorový prostor**, přirozeným způsobem ekvivalentní Riemannově sféře.



Roger Penrose (1931)

Nejzákladnější grupa symetrií ve fyzice spojující pozorovatele pohybující se různými rychlostmi – **vlastní Lorentzova grupa** – tak může být realizována jako grupa automorfismů nejjednodušší komplexně jednodimenzionální variety, Riemannovy sféry.

Obr. 1.4



Nebeská sféra pozorovatele je v relativistické teorii přirozeně reprezentovaná Riemannovou sférou.

Základní myšlenkou twistorové teorie je využití souvislosti mezi kvantovou mechanikou a prostoročasovou strukturou, jak je zachycena v Riemannově sféře, rozšířením naznačeného postupu na celý prostoročas.
Celé paprsky světla vystupují v teorii jako základní stavební kameny dokonce fundamentálnější, než prostoročasové body.
V tomto smyslu se zde prostoročas považuje za odvozený pojem a twistorový prostor chápeme jako prostor základní.
Tyto dva prostory jsou spojeny korespondencí, která reprezentuje světelné paprsky v prostoročase jako body v twistorovém prostoru.
Bod prostoročasu se tak stává Riemannovou sférou v twistorovém prostoru.
Prozatím jsme popsali twistorový prostor jako reálně pětidimenzionální, a proto se nejedná o komplexní prostor (komplexní prostory jsou vždy reálně sudědimenzionální).
Pokud chápeme světelné paprsky jako historie fotonů, musíme vzít v úvahu též energii fotonů a jejich helicitu, která může být pravotočivá nebo levotočivá.
Jedná se sice o objekty trochu složitější než pouhé světelné paprsky, ale díky tomu dostáváme komplexní projektivní třídimenzionální (šest reálných dimenzí) prostor $\mathbf{CP_3 \equiv PT}$ čili tzv. **projektivní twistorový prostor**.

Jeho pětidimenzionální podprostor **PN** rozštěpuje prostor **PT** na levotočivou $\mathbf{PT}^{-}$ a pravotočivou $\mathbf{PT}^{+}$ polovinu.
Body v prostoročase jsou dány čtyřmi reálnými čísly a projektivní twistorový prostor může být popsán poměry čtyř komplexních čísel.
Jestliže světelný paprsek reprezentovaný twistorem (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) prochází prostoročasovým bodem (x_0, x_1, x_2, x_3), Pak je splněna incidenční podmínka

$$\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} . \qquad (1.103)$$

která tvoří základ korespondence prostoročasové a twistorové struktury.
Bod v twistorovém prostoru je definován dvěma spinory

$$\omega^a = \begin{pmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^0 \\ Z^1 \end{pmatrix} , \qquad (1.104)$$

$$\pi_{\bar{a}} = \begin{pmatrix} \pi_{\bar{0}} \\ \pi_{\bar{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^2 \\ Z^3 \end{pmatrix} . \qquad (1.105)$$

Incidenční podmínka (1.103) tak dostává tvar

$$\omega = ix\pi . \qquad (1.106)$$

Povšimněme si, že při posunu počátku

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} - \mathbf{Q} , \qquad (1.107)$$

dostaneme

$$\omega^a \mapsto \omega^a - iQ^{a\bar{a}}\pi_{\bar{a}} , \qquad (1.108)$$

zatímco $\pi_{\bar{a}}$ zůstává nezměněno.

Twistor reprezentuje čtyři komponenty impulsu **p** (z nichž tři jsou nezávislé) a šest komponent impulsmomentu **b** (z nichž jsou nezávislé čtyři) částice nulové hmoty.
Výrazy pro ně mají tvar

$$p_{a\bar{a}} = i\bar{\pi}_a \pi_{\bar{a}} \ , \qquad (1.109)$$

$$b^{a\bar{a}b\bar{b}} = i\omega^{(a}\bar{\pi}^{b)}\varepsilon^{\bar{a}\bar{b}} - i\varepsilon^{ab}\bar{\omega}^{(\bar{a}}\pi^{\bar{b})}, \qquad (1.110)$$

kde závorky označují symetrizaci.
Tyto vztahy zahrnují skutečnost, že čtyřhybnost **p** je nulový, do budoucnosti orientovaný vektor, a že **Pauliho – Lubanskiho spinový vektor (**Józef Kazimierz Lubański (1914 - 1946)) je dán čtyřhybností násobenou helicitou *s*.
Tyto veličiny určují twistorové proměnné $\left(\omega^a, \pi_{\bar{a}}\right)$ až na celkový fázový faktor twistoru.
Helicita může být vyjádřena jako

$$s = \frac{1}{2} Z^{\alpha} \bar{Z}_{\alpha}, \qquad (1.111)$$

kde komplexní sdružení twistoru $Z^{\alpha} = \left(\omega^a, \pi_{\bar{a}}\right)$ je duálním twistorem $\bar{Z}^{\alpha} = \left(\bar{\pi}_a, \bar{\omega}^{\bar{a}}\right)$.
Povšimněme si, že komplexní sdružení prohazuje proužkované indexy a zaměňuje twistory za jejich duály.
$s > 0$ odpovídá pravotočivým částicím a jde tedy o již zmíněnou horní polovinu twistorového prostoru $\mathbf{PT}^{+}$.
$s < 0$ obdobně odpovídá levotočivým částicím, tj. dolní polovině $\mathbf{PT}^{-}$.
V případě $s = 0$ dostáváme skutečné světelné paprsky.
Rovnice určující prostor **PN** světelných paprsků je tedy

$$Z^{\alpha}\bar{Z}_{\alpha} = \omega^a \bar{\pi}_a + \pi_{\bar{a}}\bar{\omega}^{\bar{a}} = 0. \qquad (1.112)$$

Twistorovou vlnovou funkcí definujeme komplexní funkci $f(Z^{\alpha})$ na twistorovém prostoru.

Ne každá funkce $f(Z^{\alpha})$ je a priori vlnovou funkcí, jelikož twistor Z^{α} obsahuje jak informace o poloze, tak informace o hybnosti a oba tyto údaje nemohou zároveň vystupovat jako argumenty vlnové funkce.
Poloha a hybnost jsou nekomutující proměnné.
Komutační relace v twistorovém prostoru mají tvar

$$\left[Z^{\alpha},\bar{Z}_{\beta}\right]=\hbar\delta^{\alpha}_{\beta}\ , \qquad \left[Z^{\alpha},Z^{\beta}\right]=0\ , \qquad \left[\bar{Z}_{\alpha},\bar{Z}_{\beta}\right]=0\ . \qquad (1.113)$$

Z^{α} a $\bar{Z}_{\alpha}$ jsou tak kanonicky sdružené proměnné a vlnová funkce musí být funkcí pouze jedné z nich.
Vlnová funkce tedy musí být holomorfní či antiholomorfní funkcí twistoru Z^{α}.
Musíme nyní zkontrolovat, jak výše uvedené vztahy závisí na uspořádání operátorů.
Ukazuje se, že výrazy pro impuls a pro impulsmoment jsou na uspořádání operátorů nezávislé, a jsou tedy kanonicky určené.
Oproti tomu výraz pro helicitu závisí na uspořádání a my musíme vybrat správnou definici.
Ta je dána symetrickou formou součinu, tj.

$$s=\frac{1}{4}\left(Z^{\alpha}\bar{Z}_{\alpha}+\bar{Z}_{\alpha}Z^{\alpha}\right)\ , \qquad (1.114)$$

což v holomorfní reprezentaci vlnové funkce můžeme přepsat ve tvaru

$$s=-\frac{\hbar}{2}\left(2+Z^{\alpha}\frac{\partial}{\partial Z^{\alpha}}\right)\ , \qquad (1.115)$$

kde $Z^{\alpha}\frac{\partial}{\partial Z^{\alpha}}$ je tzv. **stupeň nehomogenity v Z^{α}**.
Vlnovou funkci můžeme rozložit do vlastních stavů operátoru helicity *s*.
Těmi jsou vlnové funkce s přesně definovaným stupněm homogenity.
Např. bezspinová částice s nulovou helicitou má twistorovou vlnovou funkci se stupněm homogenity -2.

Levotočivá částice spinu 1/2 má helicitu $\hbar/2$, a její twistorová vlnová funkce má proto stupeň homogenity -1, zatímco pravotočivá verze této částice bude mít vlnovou funkci se stupněm homogenity -3.
Mohli bychom se domnívat, že symetrii lze obnovit záměnou $Z^{\alpha} \leftrightarrow \overline{Z}_{\alpha}$, převrácením tabulky stupňů homogenity a použitím Z^{α} pro jednu helicitu a $\overline{Z}_{\alpha}$ pro druhou.
Ale stejně jako nelze v klasické kvantové mechanice volně směšovat polohovou a hybnostní reprezentaci, nemůžeme směšovat ani holomorfní a antiholomorfní reprezentace Z^{α} a $\overline{Z}_{\alpha}$.
Musíme zvolit jednu z nich.
Nyní bychom rádi dostali prostoročasový popis vlnové funkce *f*(*Z*).
Ten je dán křivkovým integrálem

$$\phi_{\overline{a}\ldots\overline{g}}(\mathbf{x}) = \int_{\omega=ix\pi} \left(\pi_{\overline{a}} \cdot \ldots \cdot \pi_{\overline{g}}\right) f\left(Z^{\alpha}\right) \pi_{\overline{e}}\, d\pi^{\overline{e}}\,, \qquad (\ 1.116\ )$$

nebo

$$\phi_{a\ldots g}(\mathbf{x}) = \int_{\omega=ix\pi} \left(\frac{\partial}{\partial\omega^{a}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial\omega^{c}}\right) f\left(Z^{\alpha}\right) \pi_{\overline{e}}\, d\pi^{\overline{e}}\,, \qquad (\ 1.117\ )$$

kde integrování probíhá přes cestu zahrnující twistory Z^{α} splňující spolu s **x** podmínku (1.103) a počet členů π či $\frac{\partial}{\partial\omega}$ závisí na spinu a helicitě pole.
Tato rovnice definuje prostoročasové pole ϕ...(*x*), které automaticky splňuje rovnice pole částice nulové hmoty.
Podmínka holomorfnosti vlnové funkce je tedy ekvivalentní všem nepřehledným rovnicím pole pro částici s nulovou hmotou.
Přesněji řečeno, pro lineární pole v plochém prostoru či limitu malých energií Einsteinova gravitačního pole.
Geometricky tvoří prostoročasový bod **x** $\mathbf{CP_1}$-přímku (která je Riemannovou sférou) v twistorovém prostoru.
Tato přímka musí protnout oblast, kde je funkce *f*(*Z*) definována.
Přitom *f*(*Z*) není v oblasti definována všude.

Má singulární body které obíhala cesta integrování v (1.116) resp. (1.117).
Matematicky přesně řečeno, twistorová vlnová funkce je prvkem kohomologie.
To lépe pochopíme, uvážíme-li systém otevřených okolí oblasti twistorového prostoru, která nás zajímá.
Twistorová funkce pak musí být definována na průnicích dvojic těchto otevřených množin. Říkáme, že je prvkem tzv. **první sheafové kohomologie**.